Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Económicas

CRECIMIENTO ECONÓMICO

NOTAS DE CLASE:

"El modelo de Solow"

Por los integrantes del curso[1]
Año 2012

[1] Las presentes notas de clase fueron elaboradas por los miembros del curso de crecimiento económico de Andrés Asiain en colaboración con Nicolas Leveroni y Pablo García. Estas notas pueden descargarse del sitio web del curso: http://crecimientoeconomico-asiain.weebly.com/neoclaacutesicos.html

1. Introducción

Interpretación de Manual

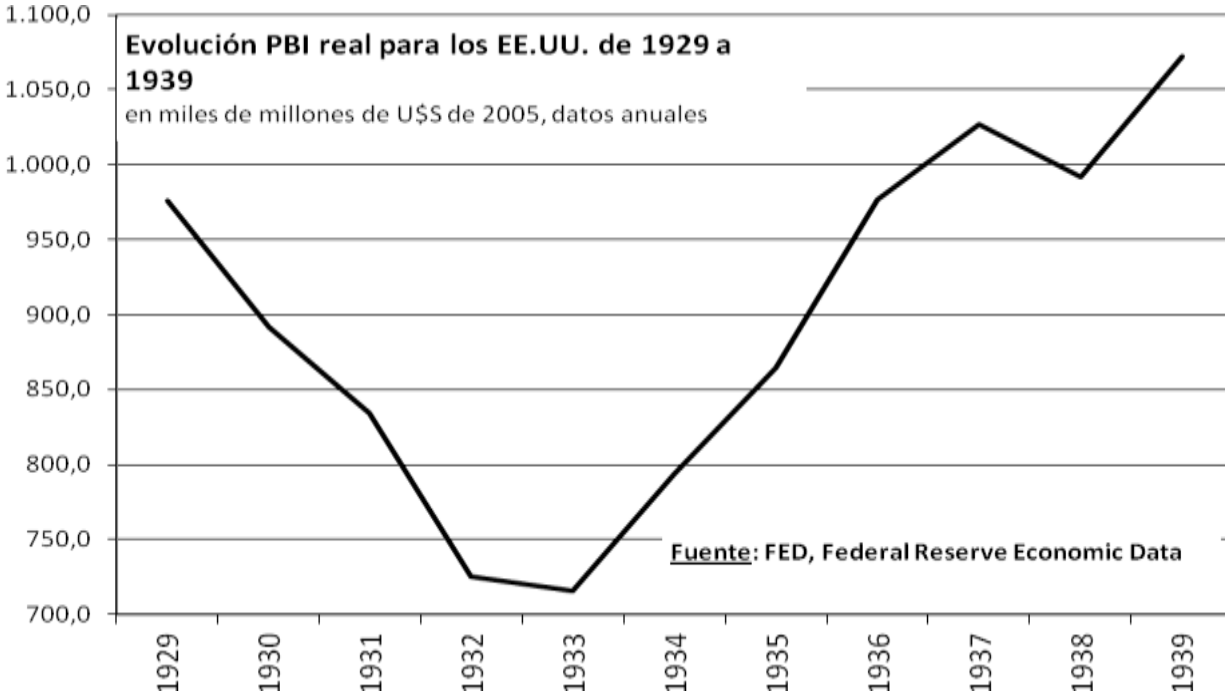
La conclusión principal del modelo de Solow es que la acumulación de capital físico no explica la mayor parte del crecimiento del producto per cápita ni las diferencias que existen entre los productos per cápita de los diferentes países. El capital físico realiza una contribución directa a la producción, pero no explica el crecimiento. Entonces es necesario encontrar los otros factores que si lo explican (el capital humano, el capital social, etc.).

La nuestra

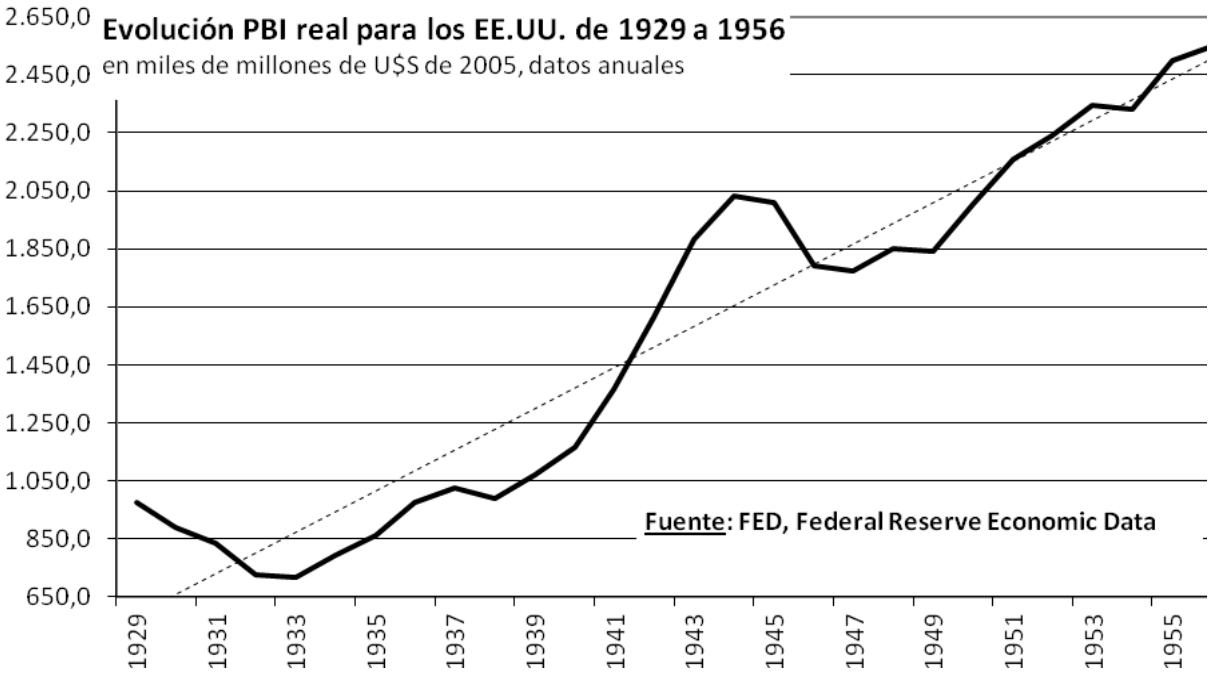
Pasaron 17 años desde que Harrod publicó su ensayo hasta que Solow publicó el suyo[2]. El texto de Harrod fue muestra la fuerte influencia que el autor recibió de la teoría general e intentaba explicar una realidad que para el año '56 había cambiado. Luego de que Keynes intentara deglutir a la teoría clásica (a la que nosotros llamaríamos marginalista) con su teoría general, Solow intenta aplicar la misma maniobra y engullirse a las ideas de Harrod dentro de su esquema de pensamiento como un caso particular. Dos cosas podemos señalar nosotros al respecto. La *primera* es que creemos que el modelo de Solow no es la forma general de la teoría económica dentro de la que las ideas de Harrod existen como un caso particular. Para justificar esto, basta con notar que uno de los supuestos de Solow es el de pleno empleo de la población activa, mientras que para Harrod la posibilidad de mantener el pleno empleo era una preocupación, no un supuesto. Lo *segundo* que nos parece interesante mostrar es que los 17 años que separan a ambos ensayos también muestran como los dos autores se enfrentaban e intentar explicar momentos diferentes de la historia. Seguramente era mucho más fácil pensar que el capitalismo es un sistema básicamente estable en la época en la que escribió Solow que en la que lo hizo Harrod. A continuación, dos gráficos que ilustran este punto.

[2] Estamos hablando de Harrod, R. (1939) "Un ensayo de teoría dinámica" Economic Journal, 49:14-33 y de Solow, R. M. (1956) "Una contribución a la teoría del crecimiento económico" Quarterly Journal of Economics, 70 (Feb),p.65-94

El PBI en la época de Harrod

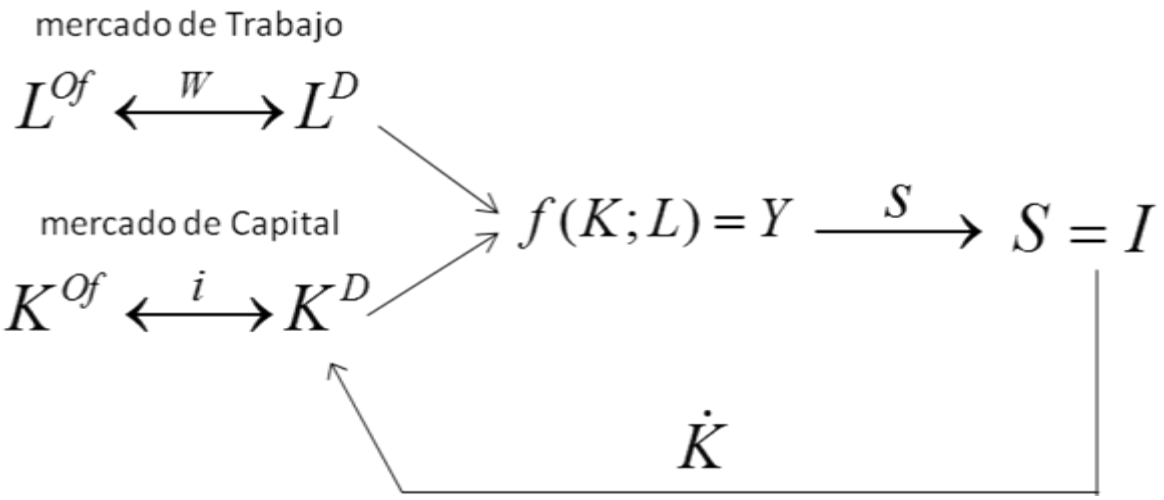


El PBI en la época de Solow



1.A. El crecimiento tirado desde la oferta

En los modelos de crecimiento neoclásicos, el crecimiento del producto se ve impulsado o "tirado" desde la oferta en los mercados de factores. De acuerdo con el siguiente esquema:



Es a partir del mercado de trabajo y de capital donde los agentes eligen las cantidades óptimas de los factores a los precios "W" e "i". Como se supone perfecta sustitución, la oferta y la demanda se igualan siempre al precio y las cantidades de equilibrio, los mercados se vacían y por ende no hay desempleo. Dada una función de producción, luego se establece la participación de cada factor en el producto (de acuerdo a sus productividades marginales) y se obtiene una cantidad "Y" producto o ingreso total. Una porción "s" de ese ingreso se ahorra[3], y como el ahorro es igual a la inversión, ese el monto "I" de inversión. Posteriormente, cuando transcurre el tiempo, esta inversión se acumula como stock de capital "$\dot{K}$" y el ciclo vuelve a comenzar.

[3] En el modelo de Solow el ahorro es una constante. Luego, en los modelos neoclásicos más desarrollados, va a intentarse microfundar este ahorro de acuerdo a una decisión intertemporal óptima de ahorro-consumo.

2. El modelo de Solow

El modelo comprende las siguientes variables: Producto (Y), Capital (K), Trabajo (L), y una "tecnología" o "efectividad del trabajo" (A) junto con el tiempo (t), relacionadas del siguiente en la forma funcional:

$$Y(t) = F\left(K(t); A(t); L(t)\right)$$

2.A. Los supuestos

(1) La función de producción tiene *rendimientos constantes a escala* en ambas variables. En términos del modelo formal, esto implica que la función es homogénea de grado uno.

$$F\left(cK; cAL\right) = cF(K; AL) \qquad \forall c \geq 0$$

Es decir, que si se n-plica la cantidad de capital y trabajo que se utiliza, también se n-plica la cantidad de producto que se obtiene.

(2) El segundo supuesto que la *productividad marginal* tanto del capital como del trabajo son *positivas*, pero *decrecientes*:

$$\frac{\partial F\left(K; AL\right)}{\partial K} \succ 0 \qquad \frac{\partial^2 F\left(K; AL\right)}{\partial K^2} \prec 0$$

$$\frac{\partial F\left(K; AL\right)}{\partial AL} \succ 0 \qquad \frac{\partial^2 F\left(K; AL\right)}{\partial AL^2} \prec 0$$

(3) Finalmente, la función de producción debe cumplir con las *condiciones de Inada*:

$$\lim_{K\to 0} F'_K = \lim_{L\to 0} F'_L = \infty \qquad \lim_{K\to\infty} F'_K = \lim_{L\to\infty} F'_L = 0$$

Esto simplemente significa que cuando la cantidad de capital y trabajo es muy pequeña, su productividad marginal es muy alta, y viceversa.

(4) Además de lo anterior, el modelo supone un único bien que se consume y se invierte, no existe el dinero y no existe el Estado. En el modelo de Solow en particular, se ahorra una cantidad fija del ingreso, no existen fluctuaciones en el empleo y el progreso tecnológico es "constante".

Por otro lado, podemos reescribir la función de producción de la siguiente manera. Si normalizamos las variables por la cantidad de trabajo efectivo ($y = \frac{Y}{AL}; k = \frac{K}{AL}; 1 = \frac{AL}{AL}$), podremos reescribir la función de producción en términos de unidades de trabajo efectivo:

$$F\left(\frac{K}{AL};\frac{AL}{AL}\right) = F\left(\frac{K}{AL};1\right) = f(k;1) = f(k)$$

Por lo tanto, el nivel de producto per cápita queda exclusivamente determinado por la cantidad relativa de capital y trabajo efectivo que se utilice.[4]

2.B. La distribución del ingreso

Al ser la función de producción homogénea de primer grado, tenemos que:

$$\frac{\partial F(K;L)}{\partial K}K + \frac{\partial F(K;L)}{\partial L}L = F(K;L)$$

Como la productividad marginal del trabajo es igual al salario y la productividad marginal del capital es igual a la tasa de interés (o tasa de retorno), tenemos que:

$$wK + iL = Y$$

Lo que implica que la totalidad del ingreso se reparte entre capital (o capitalistas) y trabajo (o trabajadores), en base a una cuestión determinada pura y exclusivamente por las condiciones materiales o "físicas" en las que se lleva a cabo la producción.

[4] Por ejemplo, si se obtiene un producto per cápita de 100 con una cantidad de capital de 10 y una cantidad de trabajo de 10; con una cantidad de capital de 20 y una cantidad de trabajo de 20, se obtendrá una cantidad de producto per cápita también de 100.

2.C. El desarrollo del modelo

Si escribimos al trabajo y a la tecnología como:

$$L(t) = L_0 e^{nt} \qquad A(t) = A_0 e^{gt}$$

Aplicando logaritmo y derivando respecto al tiempo obtenemos:

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = n \qquad \frac{\dot{A}(t)}{A(t)} = g \qquad (1)$$

Por lo tanto el trabajo, como la productividad del trabajo, crecen a tasas constantes "n" y "g".

Al ser un modelo tirado desde la oferta, el ahorro es igual a la inversión ex-ante y ex-post. Entonces, si partimos de que $S = I$ y como el ahorro global es una porción fija del ingreso tal que $I = S = sY$, por lo tanto como:

$$Y = F\left(K; AL\right) \rightarrow I = sY = sF\left(K; AL\right) \qquad (2)$$

A su vez, si definimos la evolución del stock de capital en el tiempo, como la inversión "I" menos la depreciación "dK", tenemos la siguiente relación:

$$\dot{K}(t) = I - \delta K \qquad (3)$$

Reemplazando en (3) "I" por (2), obtenemos que la evolución del stock de capital en el tiempo es:

$$\dot{K}(t) = sF\left(K; AL\right) - \delta K \qquad (4)$$

Que debe cumplir la condición de que $n + g + \delta > 0$

Entonces, como demuestran la ecuación (1), la evolución en el tiempo del trabajo y de su productividad están explicadas por dos constantes. En consecuencia, para cerrar el modelo, hace falta determinar cómo evoluciona el stock de capital.

Por ello, si partimos del stock de capital por unidad de trabajo y aplicamos logaritmo:

$$k(t) = \frac{K(t)}{A(t)L(t)} \quad \rightarrow \quad \ln k(t) = \ln K(t) - \ln L(t) - \ln A(t)$$

Derivamos respecto del tiempo "t" $\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} - \frac{\dot{A}}{A}$ (5)

Entonces, si reemplazamos (1) y (4) en (5) y multiplicamos a ambos lados por "k", llegaremos a que:

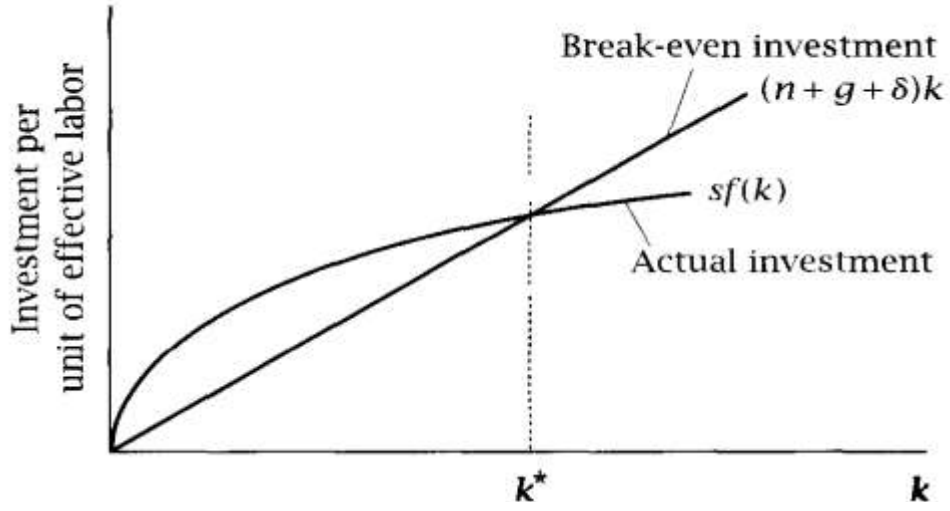
$$\dot{k} = \frac{sF(K,AL) - \delta K}{K} k - nk - gk \quad \rightarrow \quad \dot{k} = \frac{sF(K,AL) - \delta K}{K} \frac{K}{AL} - nk - gk \rightarrow$$

$$\dot{k} = \frac{sF(K,L)}{AL} - \delta \frac{K}{AL} - nk - gk \quad \rightarrow \quad \dot{k} = sf(k) - \delta k - nk - gk \rightarrow$$

$$\boxed{\dot{k} = sf(k) - (n + g + \delta)k} \quad (6)$$

Esta es la ecuación clave del modelo de Solow, que nos muestra cuál es el estado la dinámica de la acumulación de capital por unidad de trabajo "efectivo".

Gráficamente (según paper de Solow[5])

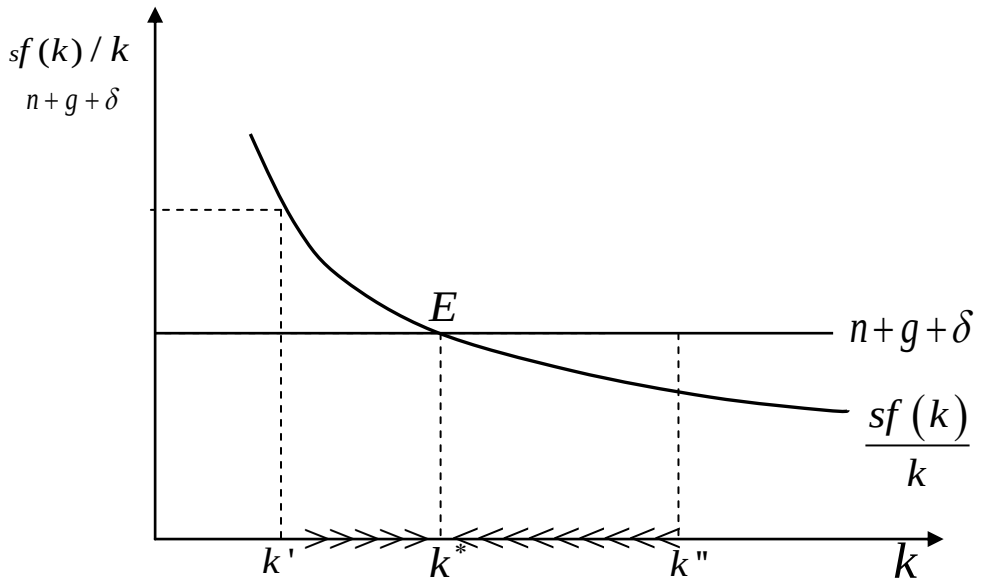


[5] El termino *Inversment per unit of efective labour* = I/AL = $\dot{K} / AL = \dot{k}$. El gráfico originalmente presentado por Solow parece tratarse del gráfico de un sistema de ecuaciones, pero en realidad se trata de la conjunción en un mismo esquema de la curva "$\dot{k}$ =o", que muestra el equilibrio inter-temporal del la variación del capital.

Alternativamente, si partimos de (5) y multiplicamos por "1/k" a ambos lados de la igualdad obtendremos:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{sf(k)}{k} - (\delta + n) \quad (7)$$

Graficamente[6]:



La curva "sf(k)/k" es decreciente y cóncava de acuerdo a los supuestos sobre la función de producción. Esto implica que a bajos niveles de capital por unidad de trabajo efectivo, el rendimiento del stock de capital es alto al igual que su acumulación, e inversamente, cuando el stock de capital es alto, el rendimiento es bajo al igual que su acumulación.

La curva "$n+g+\delta$" es una línea horizontal, pues no depende de "k". El término "δ" indica la disminución del capital per capita como consecuencia de la amortización del capital existente. El término "n" indica la disminución del capital por unidad de trabajo efectivo como consecuencia del crecimiento poblacional y "g" hace referencia al avance tecnológico en relación al viejo stock de capital. Por ello, de ni invertirse lo suficiente, el stock de capital va a disminuir como consecuencia al crecimiento de la población, a la depreciación y al avance técnico.

[6] Notemos simplemente que estamos graficando

Si se cumple que "$\dot{k}$ =o" el stock de capital crece a una *tasa constante a lo largo del tiempo*, lo que implica que el modelo va a alcanzar un equilibrio.

Analíticamente, si tomamos (7) y hacemos $(\dot{K} = 0)$ y despejamos, llegaremos al *punto de equilibrio*:

$$\boxed{sf(k) = (\delta + n + g)} \quad \text{(E)}$$

Es decir, que cuando la inversión en unidades de trabajo efectivo es igual a la tasa a la que se deprecia el capital, crece la población y se actualiza la tecnología, la acumulación de capital se mantendrá constante y por ende, también lo hará, el producto per cápita.

Gráficamente, el equilibrio queda representado por la intersección entre ambas curvas por el punto "E", al nivel de capital "k*".

En un punto como al nivel de capital "k´" se encuentra a la izquierda del punto "E" la función de producción se encuentra por encima de la curva "$n + g + \delta$". Allí el capital es escaso y por lo tanto la remuneración es mayor, esto incentiva a que se invierta más y entonces el capital neto de depreciación comienza a crecer a una tasa mayor a lo que lo hace la población y la tecnología, hasta llegar a "k*", el equilibrio.

Analíticamente puede representarse como:

$$si \quad sf(k) > (n+g+\delta)k \quad \rightarrow \quad sf(k) - \delta k > nk + g\,k \rightarrow \quad \frac{sF(K,AL) - \delta K}{AL} > (n+g)\frac{K}{AL} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{sF(K,AL) - \delta K}{K} > (n+g)\frac{AL}{AL} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\dot{K}}{K} > \frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{A}}{A}}$$

A su vez, si nos encontramos en un punto a la derecha de "E", el capital es abundante y su remuneración baja, por lo tanto la acumulación de capital neta de depreciación crece a una tasa *menor* que la que crece la población y la tecnología. Analíticamente, el ajuste es similar al anterior:

$$si \quad sf(k) < (n+g+\delta)k \quad \rightarrow \quad sf(k) - \delta k < nk + g\,k \rightarrow \quad \frac{sF(K,AL) - \delta K}{AL} < (n+g)\frac{K}{AL} \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{sF(K,AL) - \delta K}{K} < (n+g)\frac{AL}{AL} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\dot{K}}{K} < \frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{A}}{A}}$$

Entonces es posible decir que el modelo tiene un único equilibrio estable.
De este modo, como tanto la población y la tecnología crecen exógenamente, será la función de producción la que se acomode a esas tasas de crecimiento[7]. Y a su vez, el equilibrio en el modelo se alcanza por esta la particular forma supone su función de producción: rendimientos crecientes pero decrecientes a escala de los factores. Por ello, es fácil ver que cualquier otra función de producción que no cumpla esos requisitos técnicos modificaría la estabilidad del equilibrio.

2.D. El problema del ahorro detrás del modelo

Un aumento en el ahorro genera un desplazamiento de la curva "sf(k)/k" hacia arriba (ver gráfico). En ese momento nos encontramos en un punto como "b" donde el nuevo stock capital de equilibrio "k' " se encuentra a la derecha de "k*". En ese punto el capital es escaso, su remuneración es alta y la tasa de acumulación de capital crece, pero solo temporalmente, hasta el nuevo equilibrio "k' " donde vuelve a ser "$\dot{k}$ =o". Eso puede apreciarse en los esquemas A y B: una variación del nivel de ahorro, no genera cambios permanentes en la tasa de crecimiento del capital.

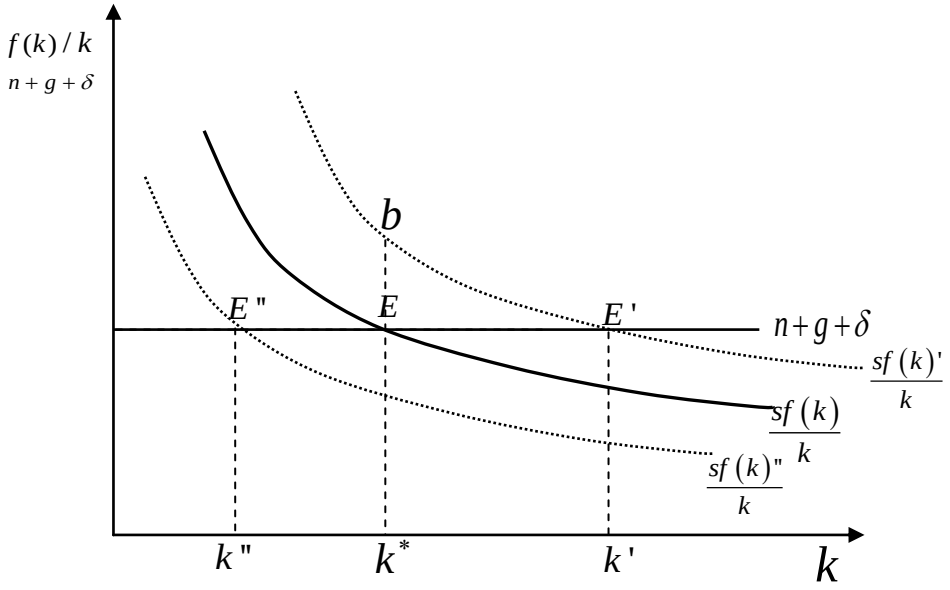
Inversamente, una disminución en el ahorro genera un desplazamiento de la curva de inversión hacia abajo, de manera tal que el nuevo sotck de capital "k'' " será menor que "k*", aunque su tasa de crecimiento sea la misma "E'' = E".

Algo similar sucede con el comportamiento del producto *per cápita* $Y/L = Af(k)$. Cuando "k" es constante, crece a la tasa "$g+\delta$", pero cuando "k" está aumentando, el producto *per cápita* crece tanto porque está aumentando "A" como porque está aumentando "k". Sin embargo, esta mayor tasa de crecimiento ocurre sólo hasta que se alcanza el nuevo nivel de equilibrio en el que es nuevamente constante, y la tasa de crecimiento del producto per cápita vuelve a ser simplemente "$g+\delta$"(como se ve en el esquema D).

Por lo tanto, un *aumento permanente* en la *tasa de ahorro* produce cambios en los niveles de stock de capital sin modificar permanentemente la *tasa de crecimiento* del producto per cápita.

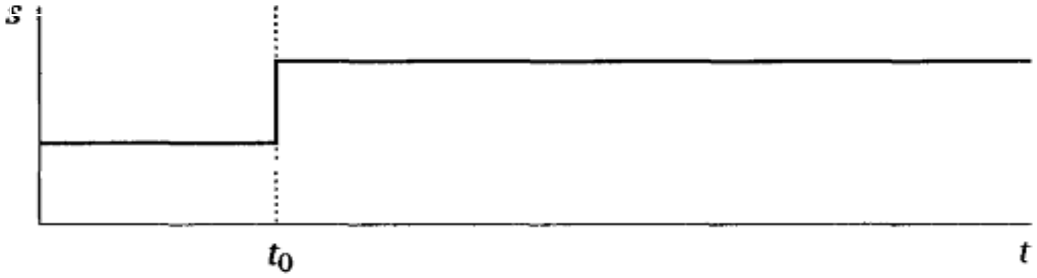
[7] Un ejemplo de ello sería que si "d", "n" y "g" creciesen al 2% cada uno, llegaríamos a un crecimiento total del producto del 6%. La dinámica sería la acumulación de capital hasta cierto nivel compatible con ese crecimiento, donde la tasa de crecimiento del capital tendería a acomodarse hacia esa tasa rígida, siempre. De aquí es que se desprende el problema de la rigidez de la tasa de crecimiento y la "g" como el residuo de Solow.

Gráficamente:

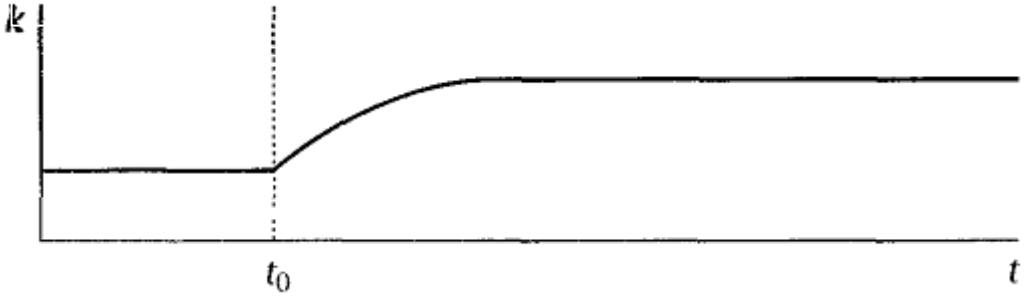


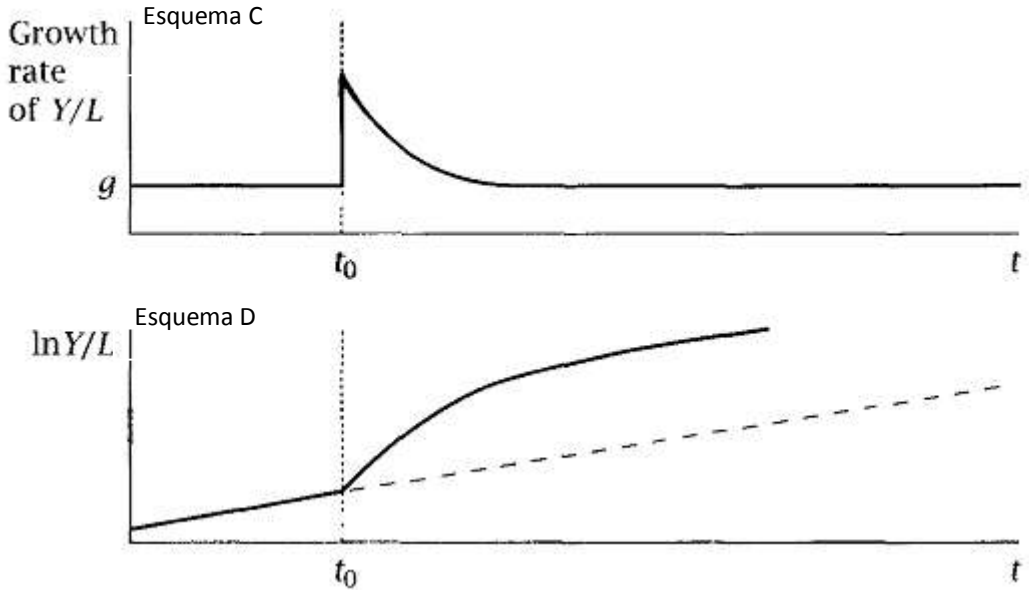
En resumen, un cambio en la *tasa de ahorro* tiene un *efecto* sobre el *nivel* del producto per cápita, pero *no* sobre su *tasa* de crecimiento.

Esquema A



Esquema B





2.D.1 El consumo ante cambios en la tasa de ahorro:

Como vimos, cambios en la tasa de ahorro no generan cambios en la tasa de acumulación del capital, pero si cambian los niveles de ahorro ¿qué sucede con el consumo?

Si $Y = C + S \rightarrow \quad C = Y - S \rightarrow \quad C = Y - sY \rightarrow \quad C = (1-s)Y \quad (9)$

Entonces, si queremos saber que sucede con el consumo cuando varía el ahorro debemos ver el signo de su derivada. Por ende, y teniendo en cuenta que $Y\left[K(s)\right] = F\left[K(s)\right]$ hacemos:

$$\frac{\partial C}{\partial s} = (1-s).f'_K \frac{\partial K}{\partial s} + f(K;AL)(-) \quad = \quad (1-s).f'_K \frac{\partial K}{\partial s} - f(K;AL)$$

Tenemos un efecto ambiguo en el consumo, dependiendo de las magnitudes que tenga cada variable. Ante un mayor ahorro hay menor consumo, pero también hay mayor capital por trabajador efectivo, entonces el consumo variará de acuerdo a lo que predomine.

Analíticamente, para ver el resultado del ahorro sobre el consumo debemos ver como varia el consumo en el Steady State. Dados los valores de "n" y "δ" y "g" hay un solo estado estacionario donde k* > 0 para cada valor de la tasa de ahorro "s" que vamos a representar como k*(s).

Si Y=C+S, con S=sY, si normalizamos por trabajador efectivo (AL) y depejamos, llegaremos a que el nivel de consumo en Steady State entonces será:

$$\left(\frac{C}{AL}\right)^{*} = (1-s)y\left[k^{*}(s)\right], \text{despejando } \rightarrow sy\left[k^{*}(s)\right] = y\left[k^{*}(s)\right] - \left(\frac{C}{AL}\right)^{*} \quad (10)$$

Sabemos por la ecuación (E) que el Steady State se da cuando $sf(k) = (\delta + n + g)k$ y como $sy\left[k^{*}(s)\right] = sf\left[k^{*}(s)\right]$, por lo tanto si reemplazamos por (10) y despejamos obtendremos que:

$$y\left[k^{*}(s)\right] - \left(\frac{C}{AL}\right)^{*} = (\delta + n + g)\left[k^{*}(s)\right] \rightarrow \quad -\left(\frac{C}{AL}\right)^{*} = (\delta + n + g)\left[k^{*}(s)\right] - y\left[k^{*}(s)\right] \rightarrow$$

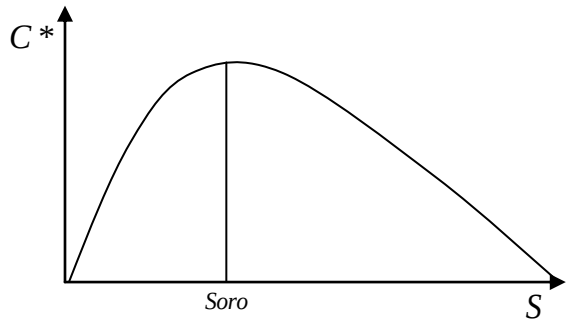
$$\left(\frac{C}{AL}\right)^{*} = y\left[k^{*}(s)\right] - (\delta + n + g)\left[k^{*}(s)\right] \rightarrow \quad \left(\frac{C}{AL}\right)^{*} = \boxed{c = y\left[k^{*}(s)\right] - (\delta + n + g)\left[k^{*}(s)\right]} \quad (11)$$

Si derivamos (11) respecto de "s", llegaremos al mismo resultado:

$$\frac{\partial c}{\partial s} = f'_{\left[k^{*}(s)\right]}\frac{\partial k^{*}(s)}{\partial s} - (\delta + n + g)\frac{\partial k^{*}(s)}{\partial s} \quad \wedge \quad \frac{\partial^{2} c}{\partial s} = f''_{\left[k^{*}(s)\right]}\frac{\partial^{2} k^{*}(s)}{\partial s} - (\delta + n + g)\frac{\partial^{2} k^{*}(s)}{\partial s}$$

La primera derivada queda indeterminada en tanto la segunda es negativa.

Gráficamente puede representarse como:



La función es creciente para valores bajos de "s" y decreciente para valores altos de "s".

Si la tasa de ahorro es menor a la de la regla dorada hay un trade off entre consumo presente y consumo futuro, si la tasa de ahorro es mayor nos encontramos en ineficiencia dinámica, los puntos "malos" de la curva de Laffer, en donde se está resignando consumo presente y consumo futuro al mismo tiempo.

Por ende, ante cambios en el ahorro, dependiendo de cuál sea "s" (determinada exógenamente en el modelo) los niveles de consumo pueden ser mayores, menores o quedar iguales, gráficamente:

3. CONCLUSIONES

La principal conclusión que emerge del modelo de Solow es un crecimiento sostenido dependerá de que aumente la efectividad del trabajo. En consecuencia, la acumulación de capital fijo (la tasa de ahorro) no explica el crecimiento en equilibrio, que depende de la tasa de incremento de la oferta de trabajo y su eficiencia (variables exógenas al modelo por lo que, en definitiva, el modelo no explica el crecimiento).

Por otro lado, en el texto original de Solow, el mismo autor expresa que su intención es mostrar que el modelo de Harrod implicaba "un supuesto poco realista" sobre la imposibilidad de elegir diferentes combinaciones de capital y trabajo, de este modo al elegir una función de producción con coeficientes flexibles, dicha inestabilidad desaparece. Pero la inestabilidad en los términos que nos presenta Harrod no es solucionada ya que se asume ex-ante una producción acorde al pleno empleo de los factores. De esa manera, la oferta determina la demanda y la tasa garantizada a la efectiva. En su lugar se trabaja con la posibilidad de un crecimiento balanceado entre la tasa garantizada (que se asume igual a la efectiva) y la tasa natural (de oferta de empleo). La elección de una función de coeficientes flexibles, "bien comportada", implica que la estabilidad del crecimiento en el modelo de Solow depende de supuestos pocos realistas sobre las condiciones técnicas de producción (rendimientos constantes a escala, decrecientes para cada factor individualmente, etc.). Es decir, el equilibrio no lo garantiza el libre funcionamiento de los mercados y los precios flexibles, sino una serie de supuestos de tipo ingenieril sobre las condiciones materiales de producción.