Universidad de Buenos Aires - Facultad de Ciencias Económicas

CRECIMIENTO ECONÓMICO

NOTAS DE CLASE:

"Crecimiento Endógeno"

Por: Andrés Asiain[1]
Año 2012

[1] Las presentes notas de clase fueron elaboradas para el curso de crecimiento económico de Andrés Asiain. Pueden descargarse del sitio web del curso: http://crecimientoeconomico-asiain.weebly.com/tecnologiacutea.html

1. Teoría de la Convergencia

La teoría neoclásica del crecimiento predice que dado el supuesto de que todos los países tienen la misma tecnología, considerada como exógena, el producto por trabajador de los países con menor nivel de capital por trabajador crece a mayores tasas que los países con mayor dotación relativa de capital. Detrás de ese comportamiento se encuentra el supuesto de rendimientos decrecientes en cada factor cuando los demás están constantes.

Si partimos de una función de producción agregada del tipo Cobb-Douglas:

$$Y(t) = A(t)K(t)^{\alpha} L(t)^{(1-\alpha)} \rightarrow \text{como } L = L^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

dividimos para obtener las variables en términos per cápita

$$\rightarrow \frac{Y}{L} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}\left(\frac{L}{L}\right)^{1-\alpha} \rightarrow \quad \frac{Y}{L} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha}.(1)^{1-\alpha} \rightarrow \quad y = A(t)k^{\alpha} \text{ ó } \boxed{\frac{1}{k} = \left(\frac{y}{A}\right)^{1/\alpha}} \quad (1.1)$$

Ahora, si aplicamos logaritmo y derivamos respecto al tiempo, obtendremos:

$$\frac{\partial y}{\partial t} \rightarrow \ln(y) = \ln(A) + \alpha \ln(k) \rightarrow \quad \frac{\dot{y}}{y} = \alpha\frac{\dot{k}}{k} + \frac{\dot{A}}{A} \quad (1.2)$$

La expresión del crecimiento del producto en términos de sus tasas de crecimiento per-cápita. Igualmente, debemos poder expresar esto en variables que no sean la dotación de capital, por ello, debemos buscar una expresión distinta para $\dot{k}/k$, entonces:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \left(\frac{\dot{K}}{K}\right) - \left(\frac{\dot{L}}{L}\right) = \frac{I}{K} - n = \frac{sY}{K} - n \rightarrow \text{divido por "L"} \rightarrow \frac{s\frac{Y}{L}}{\frac{K}{L}} - n = s\frac{y}{k} - n \rightarrow$$

Si reemplazo por "k" de (1.1)

$$\rightarrow sy.\left(\frac{A}{y}\right)^{1/\alpha} - n = sA^{1/\alpha}\frac{1}{y^{1/\alpha-1}} - n \rightarrow \quad \frac{\dot{k}}{k} = sA^{1/\alpha}\frac{1}{y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} - n \quad (1.3)$$

Entonces, reemplazando (1.3) en la tasa de crecimiento del producto por trabajador, (1.2) puede escribirse como[2]:

$$\frac{\partial \ln(y)}{\partial t} \rightarrow \quad \boxed{\frac{\dot{y}}{y} = \alpha\left(sA^{1/\alpha}\frac{1}{y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}} - n\right) + \frac{\dot{A}}{A}} \quad (1.4)$$

Si derivamos (1.4) respecto de "s" y "y":

$$\frac{\partial \dot{y}/y}{\partial s} = \alpha A^{1/\alpha} y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - n > 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial \dot{y}/y}{\partial y} = -\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) sA^{1/\alpha}\frac{1}{y^{\frac{1-\alpha}{\alpha}-1}} < 0$$

Entonces, puede verse que dada la tasa de la tecnología el crecimiento está positivamente relacionado con la propensión al ahorro "*s*", y negativamente con el producto por trabajador "*y".*

De este modo, como señala Romer, P (1994), la idea de la convergencia en el largo plazo a las mismas tasas de crecimiento del producto se contradice con la evidencia empírica. Las estadísticas demuestran que los países pobres no crecen a mayores tasas que los países ricos y las diferentes propensiones al ahorro "s" y de productividad del trabajo "1-α"[3], no son estadísticamente significativas.

De este modo, los modelos de crecimiento endógeno tratarán de resolver la cuestión abandonando el supuesto de que la tecnología es la misma en todos los países. Será por ello que haciendo depender el desarrollo tecnológico de alguna variable que se presente en mayor medida en los países desarrollados, logran una teoría que no prediga la convergencia entre éstos y los no desarrollados[4].

2. La inestabilidad en los modelos de crecimiento endógeno

Antes de desarrollar las principales formas de endogenizar el cambio tecnológico conviene señalar un punto importante. Una condición necesaria para que exista el crecimiento a una tasa constante (estable) es que el capital presente rendimientos decrecientes a escala cuando se lo incrementa en forma individual. Vale

[2] Ver Romer, P (1994), p.5.

[3] Esta medida como la participación de la masa salarial en el ingreso por el supuesto de que la productividad marginal de cada factor se iguala a su remuneración

[4] Por ejemplo, en general los países desarrollados presentan mayor proporción de obesos sobre su población total. Un modelo que incorpore al trabajador obeso como un nuevo insumo de la función de producción (A=trabajador obeso) obtendrá buenos resultados econométricos para predecir la no convergencia de las tasas de crecimiento entre países con distinto nivel de desarrollo.

advertir que estamos hablando del rendimiento marginal del capital dada la cantidad de trabajo, lo que no hay que confundir con lo que pasa cuando se incrementa conjuntamente el capital y el trabajo. Cuando esto último sucede, en todos los modelos de crecimiento endógeno (con rendimientos crecientes a escala) el producto crece más que proporcionalmente que los factores de la producción.

Si tomamos una función Cobb-Douglas:

$$Y(t) = \overline{A}K(t)^{\alpha} L(t)^{\beta}$$

La hipótesis de rendimiento creciente a escala de la función de producción implica que "$\alpha+\beta>1$", mientras que la condición necesaria para crecer a una tasa constante, rendimientos decrecientes en el capital, que implica que $\alpha<1$. Entonces, veamos que pasa si el capital presenta rendimientos crecientes a escala, $\alpha>1$.

Si aplicamos logaritmo, y derivamos respecto del tiempo, podemos reescribir la función de producción en términos de sus tasas de crecimiento:

$$\ln(y) = \ln(\overline{A}) + \alpha \ln(K) + \beta \ln(L) \rightarrow \dot{y}/y = \alpha \dot{K}/K + \beta \dot{L}/L \rightarrow$$

(2.1) $g_Y = \alpha g_K + \beta g_L$

Siendo la tasa de crecimiento del stock de capital:

$$g_k = \dot{K}/K = I/K = sY/K \rightarrow$$

si dividimos por el producto óptimo "Q" y reemplazamos las variables:

$$g_K = s\frac{Y/Q}{K/Q} \rightarrow \quad \boxed{g_K = s\frac{u}{v}} \quad (2.2) \quad \text{y con } u = 1 \rightarrow \boxed{g_k = \frac{s}{v}} \quad (2.3)$$

Siendo (2.2) igual a la tasa efectiva y (2.3) a la tasa garantizada de crecimiento en Harrod. Ya que los modelos suponen el pleno uso de la capacidad instalada "*u=1*" y "$g_L=n$" la tasa de crecimiento de la población igual a la del empleo ya que los modelos suponen el pleno empleo de la fuerza de trabajo y un porcentaje de población económicamente activa en relación a la total constante en el tiempo. Entonces, si reescribimos a (2.1) obtendremos que:

(2.4) $g_Y = \alpha \frac{s}{v} + \beta n$

La condición para que la economía crezca a una tasa constante (la llamaremos de equilibrio o crecimiento balanceado, en la literatura aparece como de *steady state*) es que “g_k=g_y”, de manera tal que la relación capital/producto, v=K/Y, sea constante en el tiempo.

A partir de la ecuación (2.1) puede verse que eso no es posible (estrictamente hablando es posible sólo para tasas de crecimiento negativas[5]).

Dada cualquier tasa positiva de crecimiento del capital “g^0_k”, introducida en (2.1) da una tasa de crecimiento del producto:

$$g^0_Y = \alpha g^0_K + \beta g_L \rightarrow \text{ como } \alpha>1 \text{ puede verse fácilmente que} \rightarrow g^o_Y > \alpha g^0_K$$

Es decir, con α>1 el producto siempre crece a una tasa mayor que el capital.

Si esto sucede, la relación capital/producto, v=K/Y, disminuye a medida que transcurre el tiempo. La intuición económica nos dice que, dados los rendimientos crecientes del capital, a medida que el capital se acumula hace falta una menor proporción de este para producir una misma unidad de producto. Pero si esto sucede, la tasa de acumulación de capital, suponiendo constante la tasa de ahorro, se acelera con el paso del tiempo (ya que $\uparrow g_k = s/\downarrow v$). De esta manera la brecha inicial entre “g^0_y” y “g^0_k”, lejos de cerrarse, tiende a incrementarse, por lo que el crecimiento balanceado es imposible.

Pasemos ahora a estudiar los principales modelos de crecimiento endógeno.

3. Rendimientos crecientes asociados al trabajo intelectual (capital humano)

Para mostrar en forma sencilla este tipo de modelos partimos de una función Cobb-Douglas con progreso técnico asociado al factor trabajo o neutral a la Harrod:

$$Y(t) = \overline{A}K(t)^{\alpha}\left[H(t)L(t)\right]^{1-\alpha}$$

Si aplicamos logaritmo:

$$\ln(y) = \ln(\overline{A}) + \alpha\ln(K) + (1-\alpha)\ln(L) + (1-\alpha)\ln(H)$$

y derivamos respecto del tiempo, podemos escribir todo en términos de sus tasas de crecimiento:

$$\dot{y}/y = \alpha\dot{K}/K + (1-\alpha)\dot{L}/L + (1-\alpha)\dot{H}/H$$

(3.1) $$\boxed{g_Y = \alpha g_K + (1-\alpha)g_L + (1-\alpha)g_H}$$

[5] Haciendo en (2.1) que “g_k=g_y” se obtiene la tasa de crecimiento a tasa constante $g^*=(\beta/1-\alpha)g_L$ y dado que α>1 puede verse que g^*<0.

Dados los rendimientos decrecientes del capital "α", sabemos que "g_k" converge hacia "g_y", por lo que la tasa de crecimiento en el equilibrio es estable. Partiendo de (3.1) :

$$si \quad \lim_{t \to t^*} \quad g_Y = g_K \rightarrow$$

$$g_Y = \alpha(g_Y) + (1-\alpha)g_L + (1-\alpha)g_H \rightarrow g_Y - \alpha g_Y = (1-\alpha)g_L + (1-\alpha)g_H$$

$$(1-\alpha)g_Y = (1-\alpha)(g_L + g_H) \rightarrow \boxed{g_Y = g_K = n + g_H} \qquad (3.2)$$

De este modo, los modelos con que trabajamos en esta sección suponen que "g_H" depende de la producción de nuevas tecnologías o conocimiento por parte de los trabajadores empleados en la investigación y el desarrollo (I+D). Los rendimientos crecientes asociados a la producción de conocimiento frente a los rendimientos decrecientes de la producción de otros bienes y servicios, se fundamenta en su característica de ser *no rival*. Es decir que una vez desarrollada una idea, la utilización de ella por una firma no implica que no pueda se utilizada al mismo tiempo y en otro lugar por otras firmas. Para poner un ejemplo, si alguien produce un auto este puede ser utilizado en un determinado momento del tiempo en un sólo lugar. El mismo auto no puede servir para llevar a una persona de Quilmes al centro y a otra de Liniers a Ituzaingo. En cambio si uno inventa un nuevo diseño de auto este puede ser utilizado en el auto del señor que viene del sur del gran Buenos Aires como al que se dirige para el oeste. Así, un auto puede venderse a una persona por vez mientras que un diseño puede venderse a muchas personas al mismo tiempo. Producir un auto incrementa el producto en un auto, producir una idea lo incrementa en la mayor producción todos los sectores que la aplican. De ahí que se suponga que la producción de conocimiento presente *rendimientos crecientes a escala* en la economía como un todo.

Vamos a plantear un caso bastante general de formalización de la producción de conocimiento para luego ver los planteos particulares de diversos autores. Nuestro caso general puede presentarse como:

$$(3.3) \qquad \dot{H} = \delta L_h^{\lambda} H^{\varphi} z^{\beta}$$

Siendo "$\dot{H}$" la variación del stock de ideas por unidad de tiempo; "δ" una constante positiva, "L_h" la cantidad de trabajadores empleados en el sector productor de conocimiento. "λ" se encuentra en entre 0<λ<1, hace referencia a la productividad decreciente de los trabajadores en la producción de ideas, eso implica que al incrementar la cantidad de trabajadores en el sector de I+D se producen cada vez menos ideas[6]. "φ" hace referencia a la magnitud de la influencia del stock de ideas viejas en la producción de ideas nuevas. "$z=L_h/L$" es la proporción del empleo en el sector de I+D en relación al total y "β" el efecto de esa proporción sobre la producción de conocimiento.

La tasa de crecimiento del conocimiento se obtiene dividiendo (3.3) por "H":

$$\text{(3.4)} \qquad \frac{\dot{H}}{H} = g_h = \delta L_h^{\lambda} H^{(\varphi-1)} z^{\beta}$$

A. El ejemplo del modelo de JONES.

Una condición para que el modelo sea estable es que los componentes de la función de tecnología crezcan en forma proporcionada. Ello puede garantizarse suponiendo que "z" sea estable en el tiempo (o que es lo mismo, haciendo β=o), ya que de lo contrario el sector productor de conocimiento tenderá a absorber la totalidad del empleo (z creciente) o a no emplear a nadie (z decreciente). De esta manera, se cumple como condición que:

$$\text{(3.5)} \qquad \frac{\dot{L}_h}{L_h} = \frac{\dot{L}}{L} = n$$

Entonces, si aplicamos logaritmos y diferenciamos (3.4), obtendremos:

$$0 = \lambda(\dot{L}_h / L_h) + (\varphi - 1)\dot{H} / H$$

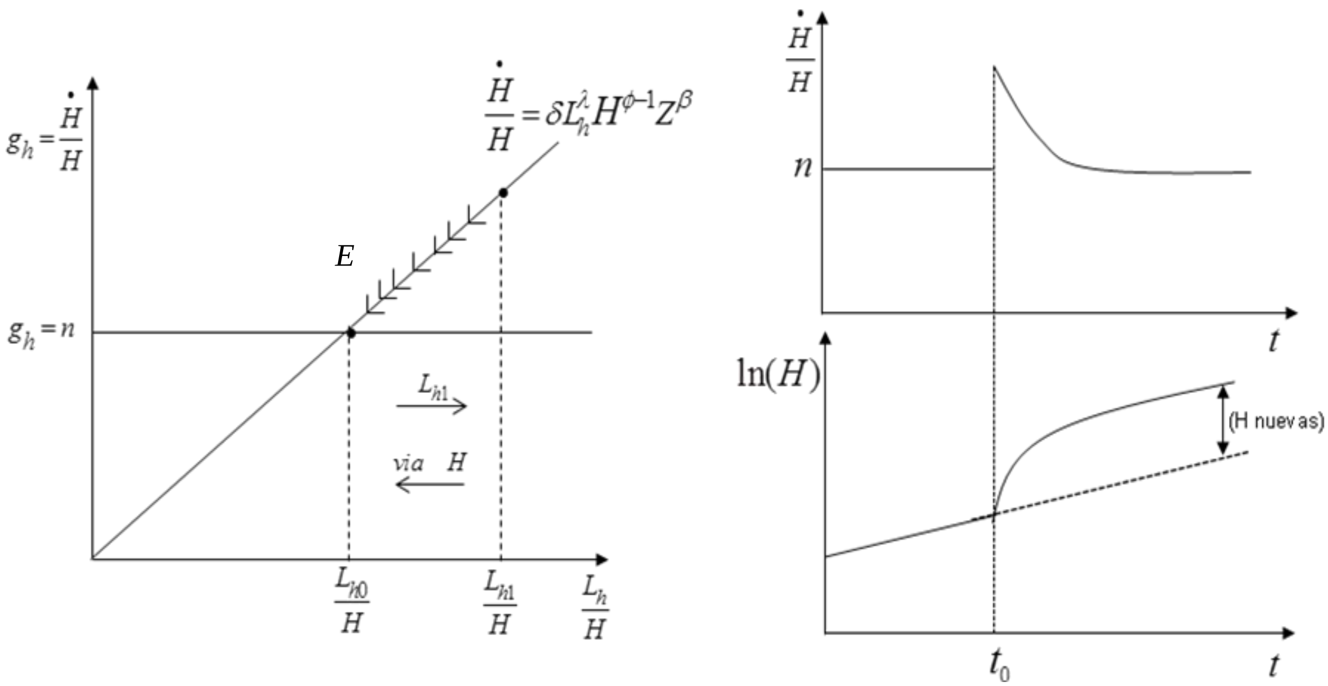
Y despejando y reemplazando:

$$\text{(3.6)} \qquad \boxed{g_h = \frac{\lambda n}{(1-\varphi)}}$$

Agregar una mayor proporción al sector de nuevas ideas aumenta el crecimiento, pero igualmente hay un límite, que implica la existencia de un equilibrio.

[6] Suele hacerse referencia al fenómeno de productividad decreciente en el sector de I+D como que los científicos se "pisaran los pies" y produjeran cada vez menos ideas.

Gráficamente[7]:



Si partimos de una situación como la que marca el punto “L_{h0}/H” y a través de una intervención estatal se decidiese aumentar, de una vez y para siempre, la planta de los distintos centros de investigación científica. Esto se vería reflejado en un aumento de “L_h” haría que, en “t0”, la tasa de crecimiento de la economía se incrementara hasta llegar al punto “L_{h1}/H” marcado en el gráfico de la derecha. Período a período se incrementarían la cantidad de “nuevas ideas”, pero menos que proporcionalmente por el rendimiento decreciente del sector I+D. Esto provocará que converjamos nuevamente a la tasa de crecimiento “n” del punto “E” de nuestro gráfico. Por ello, como omo señalan Serrano F. y Cesaratto S. (1997), el resultado alcanzado no difiere demasiado del modelo básico de Solow R.M. (1956). El crecimiento sigue dependiendo en última instancia de la tasa a la que crece la población, lo único que potenciada por las externalidades positivas del empleo en el sector de conocimiento[8]. Como vemos en los esquemas de la derecha, la tasa de crecimiento es neutral a las

[7] Nótese aquí que para poder graficar hemos supuesto valores específicos para nuestros parámetros λ=1, φ=0 y β=0, por lo que la recta H’/H queda definida con una pendiente igual a “δ”, véase el texto de Jones, C. (2000) Cap. 5.

[8] Además de ello, si directamente tomamos (3.2) veremos que ya, en el equilibrio, el crecimiento del producto per capita ($g_Y - n = g_H$) es el mismo que en el modelo de Solow.

variaciones de "L_h", la tasa de crecimiento aumenta pero solo temporalmente, hasta converger nuevamente a "n". La causa de este resultado es fácil de ver. El incremento de la tecnología depende del empleo en ese sector que a su vez *es una proporción estable del empleo total*. (ver ecuación (3.5)) Y además como el sector de I+D (el capital) sigue presentando rendimientos decrecientes a escala, la tasa de ahorro (inversión) no afecta la tasa de crecimiento en equilibrio de la economía.

B. El ejemplo de ROMER y el modificador de LUCAS

En el caso presentado por *Romer, P (1990)* puede ilustrarse partiendo de (3.3) y haciendo λ=1, φ=1 y β=0, por lo que queda:

(3.7) $\dot{H} = \delta L_h H$

de donde se obtiene directamente

(3.8) $g_h = \delta L_h = \delta z L$

En este caso la tasa de crecimiento depende del *nivel absoluto del empleo*. Si "*L*" crece a una tasa "*n*" ello implica que la tasa de crecimiento del producto y el capital por trabajador se acelera a esa tasa.

Para evitar este resultado consideremos ahora el "modificador de Lucas"[9]. Para ello supongamos en (3.3) que λ=0, φ=1 y β=1, por lo que:

(3.9) $\dot{H} = \delta H z$

de donde se obtiene directamente

(3.10) $g_h = \delta z$

El resultado a que llegamos es que la tasa de crecimiento depende de la proporción del empleo de la economía que se utiliza en producir la tecnología. Si pensamos que generar conocimiento implica abstenerse de producir bienes de consumo final, puede pensarse en "*z*" como una forma en que las decisiones de ahorro e inversión afectan la tasa de crecimiento. Asimismo, la diferencia entre "*s*" y "*z*" es que no cualquier inversión modifica la tasa de crecimiento de equilibrio, sino sólo aquella realizada en el sector que genera rendimientos crecientes.

[9] Esta presentación del modificador difiere de la presentada por Serrano F. y Cesaratto S. (1997), eliminando el efecto negativo del crecimiento de la tasa de la población sobre el producto per capita.

4. Rendimientos crecientes asociados al capital físico (modelos AK)

Abordaremos aquí distintos modelos que suponen que los rendimientos crecientes se encuentran asociados a la acumulación de capital ya por procesos de aprendizaje industrial o porque parte de ella se da en bienes que tienen incorporados adelantos técnicos, o lo que sea. Empecemos planteando a la tecnología asociada a nuestra función de producción Cobb-Douglas $Y(t)=\overline{A}K(t)^{\alpha}\left[H(t)L(t)\right]^{1-\alpha}$, como:

(4.1) $H=K^{x}$

de manera que, dividiendo por H:

(4.2) $g_h = xg_k$

Entonces, si tomamos (4.2) y reescribimos la tasa de crecimiento de la economía de (3.1) obtendremos:

$$g_Y=\alpha g_K+(1-\alpha)g_L+(1-\alpha)xg_k=\left[\alpha+(1-\alpha)x\right]g_K+(1-\alpha)g_L \rightarrow$$

(4.3) $g_Y=\left[\alpha+(1-\alpha)x\right]\dfrac{s}{v}+(1-\alpha)n$

Entonces, al igual que cuando analizamos en (2) la inestabilidad de los modelos de crecimiento endógeno, el resultado de (4.3) dependerá del valor que le demos a "x". Si 0<x<1 (podría interpretarse de esta manera el modelo de Arrow, K., 1962), entonces $\left[\alpha+(1-\alpha)x\right]$<1, el capital continúa presentando rendimientos decrecientes. Nuevamente, téngase en cuenta que aunque el capital y el trabajo presenten rendimientos decrecientes a escala cuando aumenta separadamente, la función de producción agregada presenta rendimientos crecientes a escala cuando se incrementan el capital y el trabajo en forma conjunta[10].

Aquí también la tasa de crecimiento estable de la economía viene dada por la condición de que "g_k" converja a "g_y", de donde se obtiene que:

$$si \quad \lim_{t\to t^*} \quad g_Y=g_K \rightarrow$$

$$g_Y=\left[\alpha+(1-\alpha)x\right]g_Y+(1-\alpha)g_L \rightarrow g_Y-\left[\alpha+(1-\alpha)x\right]g_Y=(1-\alpha)g_L \rightarrow$$

[10] Pues α+(1-α)x+ (1-α)=1+(1-α)x > 1 y esta es una característica de todos los modelos de crecimiento endógeno, más allá de las hipótesis sobre el rendimiento de cada factor por separado.

$$\left[(1-\alpha)-(1-\alpha)x\right]g_Y=(1-\alpha)g_L \rightarrow (1-x)(1-\alpha)g_Y=(1-\alpha)g_L \rightarrow g_Y=\frac{(1-\alpha)g_L}{(1-x)(1-\alpha)} \rightarrow$$

(4.4) $$\boxed{g_Y=\frac{1}{(1-x)}n}$$

De manera que la tasa de crecimiento de equilibrio sigue dependiendo de la de la población potenciada por la externalidad positiva asociada a la acumulación de capital. Como señalan Serrano F. y Cesaratto S. (1997) la presencia de esa externalidad, retarda el efecto de los retornos decrecientes para acumular capital, no los elimina. Por consiguiente, la tasa de crecimiento de equilibrio estable sigue siendo independiente de la tasa de ahorro.

Si "x>1" (podría interpretarse de esta manera el modelo de Romer, P, 1986), cualquier desvío entre las tasas de crecimiento del capital y el producto tiende a incrementarse. De esta manera no es posible alcanzar una tasa de crecimiento de equilibrio estable. Lo mismo sucede si x=1, *caso en que la externalidad positiva es tal que compensa exactamente los rendimientos decrecientes del factor que la genera,* ya que la tasa de crecimiento de la economía es:

(4.5) $$g_Y=\left[\alpha+(1-\alpha)\right]g_K+(1-\alpha)g_L=\frac{s}{v}+(1-\alpha)n$$

Dado que "(1-α)n" es mayor a cero "g_y" es siempre mayor que "g_k" de manera que "v=K/Y" tiende a disminuir, la acumulación de capital a acelerarse y ello acelera la tasa de incremento del producto manteniendo constante la brecha entre ambas en el marco de un *crecimiento explosivo*.

La alternativa, denominada "modificador de Frankel", es suponer que una externalidad positiva tal que "x=1" pero asociada al *capital por trabajador*.

Esta tecnología queda representada por:

$$H=\left(\frac{K}{L}\right)^x \quad con \quad x=1 \quad \rightarrow \quad H=\frac{K}{L}.$$

De esta forma, utilizando una Cobb-Douglas, tenemos que:

$$Y(t)=\bar{A}K(t)^\alpha\left[H(t)L(t)\right]^{1-\alpha}=\bar{A}K(t)^\alpha\left[\left(\frac{K(t)}{L(t)}\right)L(t)\right]^{1-\alpha}=\bar{A}K(t)^\alpha K(t)^{1-\alpha}$$

(4.6) $$\boxed{Y(t)=AK(t)}$$

El resultado es que el producto depende únicamente de la acumulación de capital y que este presenta rendimientos constantes a escala "$F'_K=A$" para todo "K".

El que el capital será el único factor que aporta al producto y que lo haga a una tasa constante puede interpretarse como que existe una función de coeficientes rígidos donde el factor escaso es el capital. Para producir una unidad más de producto se requieren "1/A" unidades de capital de forma que, operando simplemente con (4.6) se obtiene que:

$$\frac{Y(t)}{K(t)} = A = \frac{1}{v}$$

Dada esta relación fija entre producto y capital, la tasa de crecimiento de ambos se iguala y está dada por:

$$(4.7) \qquad g_Y = g_k = \frac{sY}{K} = sA = \frac{s}{v}$$

La ecuación (4.7) no es otra que la tasa de crecimiento garantizado de Harrod, R (1939). Es irónico que a casi setenta años de la publicación de su trabajo, la teoría neoclásica del crecimiento haya vuelto a su ecuación básica para dar cuenta de la evidencia empírica. Para continuar con la analogía, el modelo AK elimina la inestabilidad del filo de la navaja al suponer rendimientos constantes a escala $F'_K=A$ para todo K ($F''=0$). En Harrod, R (1939) los rendimientos son crecientes cuando la tasa de acumulación se desvía por encima del nivel garantizado, lo que hace que se acelere aún más la inversión generando una tendencia explosiva al crecimiento. Los mismo sucede si suponemos un modelo AK con rendimientos crecientes en el capital, $F'_K>0$ y $F''>0$. Por el contrario, si la inversión era menor a la garantizada, su rendimiento disminuía fomentando una menor inversión y una tendencia al estancamiento. Los mismo sucede si suponemos un modelo AK con rendimientos decrecientes en el capital, $F'_K<0$ y $F''<0$.

Por último, vemos que la tasa de crecimiento de equilibrio de los modelos AK depende positivamente de la tasa de ahorro (=inversión). El que sea toda la inversión la que estimule un mayor nivel de producto y no sólo la dirigida a un determinado sector como sucede en los modelos de capital humano, se debe a que ahora se supone que la externalidad positiva se encuentra asociada a todo el capital y no el específico de un sector.

4. A El modelo AK con optimización inter-temporal del consumo

Las ***familias*** deben maximizar la utilidad del consumo intertemporalmente. Suponiendo que la elasticidad de la utilidad marginal frente al consumo es constante "θ" y que L_0=1 (hipótesis habitual de los modelos AK) escribimos[11]:

$$MaxU = \int e^{-(\rho-n)t}\left[\frac{c^{(1-\theta)}-1}{1-\theta}\right].dt \qquad s.a. \quad \dot{k} = I = S = (r-n)k - c$$

Armamos el Hessiano:

$$H: \quad e^{-(\rho-n)t}\frac{c^{(1-\theta)}-1}{1-\theta} + \lambda(t)\left[(r-n)k - c\right]$$

Donde las condiciones para la optimización dinámica son[12]:

$$H_c^{'} = \quad e^{-(\rho-n)t}C(t)^{-\theta} = \lambda(t)$$

$$H_K^{'} = \quad (r-n)\lambda(t) = -\dot{\lambda}(t)$$

$$\lim_{t\to\infty} \quad \lambda(t)k(t) = o \quad (\textit{condición de transversalidad})$$

De ellas se deriva que el consumo crece a una tasa dada por:

(4A.1) $$\frac{\dot{c}}{c} = g_c = \frac{(r-\rho)}{\theta}$$ (*Ecuación de Euler)*

Es decir que cuando mayor sea el rendimiento del ahorro "r", menor la tasa de impaciencia "ρ" y menor el deseo de suavizar el consumo a través del tiempo "θ", mayor será la tasa de crecimiento del consumo.

Las ***firmas*** utilizan una función de producción:

$$y = f(k) = Ak(t)$$

La maximización de sus beneficios viene dado por la igualación del producto marginal a la tasa de interés:

$$\pi = f(k) - c \rightarrow \pi = Ak(t) - (r-\delta)k(t)$$

---

[11] Esta es la función CIES que también hemos utilizado cuando estudiamos un caso particular del modelo de Ramsey-Cass-Koopmans, véase notas de clase, p.6.

[12] Ver Barro, R y Sala-i-Martin, X (2003), cap.2 y 4.

Y optimiza sus ingresos cuando, el costo de contratar capital neto de depreciación iguale la productividad del mismo.

$$\partial\pi / \partial K = 0 \rightarrow \ r = A - \delta \quad (4A.2)$$

Con este resultado obtendremos las dos trayectorias óptimas de consumo e inversión. Debemos reemplazar (4A.2) en la ecuación de Euler y en $\dot{K}$, obtendremos que:

$$(4A.3) \quad g_c = \frac{(A - \delta - \rho)}{\theta}$$

$$(4A.4) \quad \dot{k} = (A - \delta - n)k - c$$

Asimismo, expresaremos en la varibale "$\gamma = (A - \delta - \rho)/\theta$" la tasa de crecimiento del consumo per-cápita.

Hemos obtenido la inversión y el consumo de equilibrio. Es interesante marcar que como se ve en la ecuación (4A.3) la trayectoria de consumo no depende del stock de capital per capita "k" sino que, puede demostrarse, es una constante positiva definida por una función acotada[13].

Como la condición de estabilidad es el crecimiento a una tasa constante para todas las variables, entonces "g_c" es la misma tasa a la que crece el producto "g_y" y el capital "g_K" en el sendero de crecimiento estable.

Ahora bien, teniendo en cuenta que:

$$s = \frac{S}{Y} \rightarrow \qquad \frac{S/K}{Y/K} = \frac{I}{K}\frac{K}{Y} = g_K \frac{1}{A} = g_c \frac{1}{A} \rightarrow \quad s = \frac{(A - \rho)}{\theta A}$$

y como "1/v=A", podemos ver también que la tasa de crecimiento de la economía es la tasa garantizada de Harrod:

$$g = \frac{s}{v} = \left[\frac{(A - \rho)}{\theta A}\right] . \frac{1}{v} = \left[\frac{(A - \rho)}{\theta A}\right] . A \rightarrow \qquad \boxed{\frac{s}{v} = \frac{(A - \rho)}{\theta}}$$

A su vez, a partir de esta expresión también podemos ver que cambios en "A", "ρ" y "θ" van a afectar de forma permanente la tasa de crecimiento.

---

13 La condición para la que la función de utilidad sea acotada es que $A>\rho+\delta>(A-\delta)(1-\theta)+\theta n+\delta$. O que, simplemente $(A-\delta-n)>\gamma$. Véase R y Sala-i-Martin, X (2003), cap. 4, p.207.

Por otro lado, a diferencia del modelo de Ramsey, en donde el mecanismo de ajuste el rendimiento decreciente de la función de producción y la relación de subjetiva con la tasa de interés, en este modelo no hay un mecanismo de ajuste que nos lleve al equilibrio, por lo que tampoco tendrá una dinámica de transición hacia el equilibrio. El sendero de crecimiento estable va a venir dado por, en última instancia, la evolución de la trayectoria del capital.

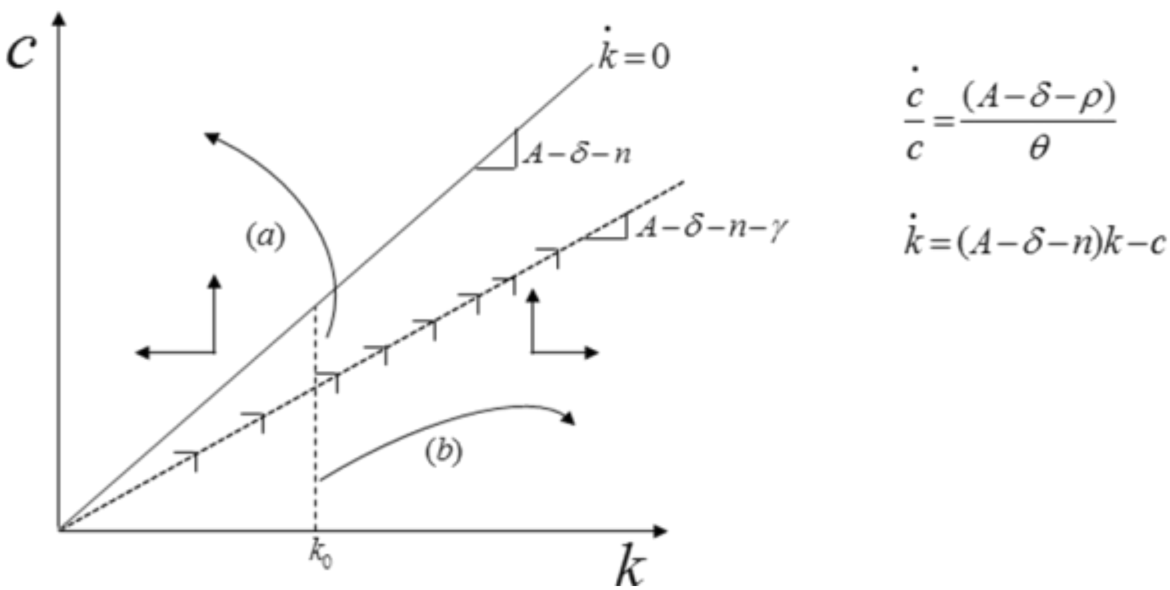
A partir una solución particular para la el crecimiento del capital fuera del equilibrio y de la condición de transversalidad obtendremos que la evolución del consumo en el tiempo será:

$$c(t) = \varphi k(t)$$

$$donde \quad \varphi = \frac{(A-\delta)(\theta-1)}{\theta} + \frac{\rho}{\theta} - n = (A-\delta-n) - \gamma$$

$$(4A.5) \quad c(t) = \left[(A-\delta-n)-\gamma\right]k(t)$$

Diagrama de Fases:



Como puede verse en el gráfico la trayectoria del consumo "$\dot{c}=0$" no existe, y dada la condición "A>ρ+δ", el consumo es siempre creciente. A su vez, por la productividad marginal del capital constante "A", la trayectoria del stock de capital de equilibrio es una línea recta con pendiente igual a "$A-\delta-n$".

Como dijimos anteriormente, el modelo no tendrá una dinámica de transición. Si partimos de un punto k(0) donde el consumo se encuentra por encima del sendero estable, la economía evolucionará una trayectoria como la marcada por (a), aumentará el consumo, disminuyendo el ahorro, la inversión y el stock de capital hasta chocar contra el eje vertical. Al igual que en el modelo de Ramsey, esta trayectoria viola la ecuación de Euler. Alternativamente si partimos de una situación de k(0) donde el consumo se encuentra por debajo del sendero estable, la economía evolucionará en la dirección marcada por (b), aumentando el consumo pero menos que proporcionalmente que el capital, hasta chocar con el eje horizontal. Nuevamente, esta trayectoria no será posible porque viola la condición de transversalidad. La única trayectoria que satisface las condiciones de primer orden es el sendero estable marcado por una línea punteada, que describe la evolución de (4A.5).

Los diferentes resultados a los que llegamos con el modelo AK, en relación al modelo Neoclásico (Ramsey) se relacionan con los rendimientos del capital. Por ello, puede decirse que el modelo AK es una buena aproximación al modelo neoclásico mientras la economía converge al steady state. Así, la diferencia sustancial se encuentra, cuantitativamente hablando, en que tan rápido operan los rendimientos decrecientes para hacer a la economía converger al equilibrio, lo que nos permite pensar al modelo AK como un “zoom” a la las transiciones entre equilibrios del modelo de Ramsey.

5. Rendimientos crecientes con competencia perfecta neoclásica

Para la microeconomía neoclásica es difícil incorporar la existencia de rendimientos crecientes a escala manteniendo el supuesto de que los mercados son perfectamente competitivos. En ese escenario cada empresario toma el precio de los factores y el de su producto como dados. De esa manera demanda cada factor hasta que su rendimiento marginal iguale su costo. Si el rendimiento marginal del factor es creciente, siempre será conveniente contratar una unidad más del factor. La producción de la firma crecerá sin límites lo que llegado un punto se vuelve incompatible con el supuesto de competencia perfecta.

Para resolver esta cuestión varios autores como Arrow, K. J. (1962), Romer, P (1986), Lucas, R.E. (1988), asumen que los rendimientos crecientes son externos a la firma pero internos a la industria (o a la economía en forma agregada). Para justificar esta elección se apoyan en la idea de que el progreso tecnológico es un bien público no apropiable en forma privada (al menos totalmente). La formalización más simple de este supuesto es a partir de la especificación del progreso técnico aumentador de mano de obra o neutral a la Harrod, en la función de producción de una determinada firma "F_i": $Y_i = F_i(K_i; A_i L_i) \quad con \quad A_i = K$

El progreso técnico deja de ser una variable exógena como en el modelo neoclásico básico de crecimiento, para pasar a depender de la acumulación de capital agregada, que cada firma particular toma como dada. El hecho de que las firmas no interioricen la externalidad positiva asociada a un factor (el capital, en el ejemplo) hace que contraten factores en forma ineficiente y que las remuneraciones de los mismos no se correspondan con su aporte real al producto[14]. A nivel agregado, se llega a un equilibrio competitivo que es un subóptimo respecto al que se correspondería si los rendimientos de cada factor fueran totalmente internalizados. Eso abre la puerta a la intervención del Estado, que subsidiando la contratación del factor que presenta la externalidad y/o cobrando impuestos a los demás, puede acercar la economía hacia el óptimo.

6. Rendimientos crecientes y poder de monopolio: "los modelos Neoschumpeterianos"

Varios autores, entre ellos Romer, P. (1990) y Grossman, G. M. and Helpman, E. (1991), optan por abandonar el supuesto de competencia para poder trabajar con rendimientos crecientes internos a la firma. La tecnología, pese a ser no rival, puede ser apropiada, al menos parcial y/o temporalmente, en forma privada. Ello permite la existencia de poder de mercado y ganancias de monopolio en el sector que la aplica, en forma similar al planteo de Schumpeter visto en clase. Las mismas pueden ser retenidas, según la especificación del modelo, por la empresa monopólica o transferida al sector que genera las tecnologías vía competencia por la compra de la patente del invento.

La existencia de ganancias monopólicas remunera de alguna forma la producción de tecnología generadora de rindes crecientes a nivel agregado. De esta manera se elimina parcialmente el desincentivo a innovar que existe en los modelos donde los rendimientos crecientes son externos a la firma. Sin embargo, la tasa de crecimiento de crecimiento estable de libre mercado sigue siendo subóptima frente a la alcanzable mediante regulaciones. Ello se debe a que la ganancia monopólica remunera sólo parcialmente la actividad de I+D y, por otro lado, porque la apropiación privada de la tecnología demora su difusión. El monopolio tecnológico tiene, bajo esta

[14] La existencia de rendimientos crecientes en un factor hace imposible la remuneración de cada factor según su aporte al producto como plantea en análisis neoclásico habitual ya que la función de producción deja de ser homogénea de grado uno y ello implica que: $F(K;L) < K F'_K + L F'_L$.

mirada, su pro y su contra. Por un lado, a futuro, es el incentivo para el desarrollo tecnológico. Por otro, en el corto, es la barrera a la difusión de la tecnología en el resto de las firmas. Este razonamiento llevado al plano de la economía mundial puede explicar, al menos parcialmente, porque los países desarrollados (generadores de tecnología) tienen intereses en la existencia de leyes de patentes internacionales y porque los países del tercer mundo (aplicadores de tecnologías importadas) se oponen a su existencia.

BIBLIOGRAFÍA

Arrow, K.J. (1962) "The economics implications of learning by doing", *Review of Economic Studies*, 29, junio, p.155-173.

Barro, R y Sala-i-Martin, X (2003) *Economic Growth*, segunda edición, McGraw Hill, New York.

Charles, j. (2000) “Introducción al Crecimiento Económico”

Harrod, R (1939) “Un ensayo de teoría dinámica” en inglés en Economic Journal, 49:14-33, 1939; en español en Sen (1979).

Lucas, R.E. (1988) “On the Mechanics of Economic Development”, *Journal of Monetary Economics*, 22, julio, p.3-42.

Solow, R M (1956) "Una contribución a la teoría del crecimiento económico", publicado en inglés en Quarterly Journal of Economics, 70 (Feb),p.65-94; en español en Sen (1979).

Romer, P. (1994) "The origins of endogenous growth", Journal of Economics Perspectives, vol.8, nº1, winter, p.3-32.

Romer, P. (1986) "Increasing returns and long-run growth"; Journal of Political Economy, vol.94, nº5.

Romer, P. (1990) "Endogenous Technological Change” ´

Serrano, F. y Cesaratto, S. (1997) “Las leyes de retorno en las teorías neoclásicas de crecimiento: una crítica sraffiana”

Cimoli, M. y otros: “Cambio Estructural, Heterogeneidad productiva y Tecnología en América Latina”

Grossman, G. M. and Helpman, E. (1991) *Innovation and growth in the global economy*, MIT.